Динамическая эпистемическая логика для «Рыцарей» и «Лжецов»*

Пример 1 (Задача о трех островитянах) *На острове встречаются только два типа жителей: Рыцари, которые всегда говорят правду, и Лжецы, которые всегда лгут. Путешественник d встретил трех жителей острова a, b и c; a говорит: «b – Лжец», b говорит: «c – Лжец», а c говорит: «и a, и b – оба являются Лжецами». Кто из них кто?*

Пример 2 (Задача о двух дорогах и благородном Рыцаре) *Путешественник встретил двух островитян: кто-то из них Рыцарь, а кто-то Лжец. За каждым из них находится дорога. Одна дорога ведет к Смерти, а другая к Спасению. Что должен сказать Рыцарь, чтобы Путешественник выбрал дорогу к Спасению?*

Пример 3 (Задача о двух дорогах и остроумном вопросе) *Условия как в предыдущей задаче. Что должен спросить Путешественник, чтобы выбрать правильную дорогу?*

Пример 4 («Самая сложная логическая задача») *Есть три бога: A, B и C, которые являются богами истины, лжи и случая в произвольном порядке. Бог истины всегда говорит правду, бог лжи — всегда обманывает, бог случая может говорить и правду, и ложь в произвольном порядке (он подбрасывает монетку). Требуется определить богов, задав 3 вопроса, на которые можно ответить «да» или «нет». Каждый вопрос задаётся только одному богу, но можно задавать одному богу более одного вопроса. Боги понимают наш язык, но отвечают на своём языке, в котором есть 2 слова: «da» и «ja» (но неизвестно, какое слово обозначает «да», а какое – «нет»).*

*НУГ «Формальная философия», проект «Динамические модели в аналитической метафизике и философии языка» (2017, 17-05-0040).

1 $PALT^T$: логика публичного обновления с агентами разного типа

См.: Liu F., Wang Y. Reasoning About Agent Types and the Hardest Logic Puzzle Ever // Minds and Machines. 2013. Vol. 23, № 1. P. 123–161.

Определение 1 (Типы агентов) *Язык, описывающий типы агентов (E), порождается следующей грамматикой:*

$$\eta ::= \psi \twoheadleftarrow !_i\varphi$$
$$\psi ::= \top \mid \varphi \mid \neg\psi \mid \psi \wedge \psi \mid K_i\psi$$

Формула $\psi \twoheadleftarrow !_i\varphi$ интуитивно значит следующее: ψ является предусловием для того, чтобы агент i произнес φ.

Пример 5 *Типы агентов*[1]*:*

«Смаллиановский» Лжец $LL : \neg\varphi \twoheadleftarrow !_i\varphi$
«Смаллиановский» Рыцарь $TT : \varphi \twoheadleftarrow !_i\varphi$
«Смаллиановский» Обыватель $LT : \top \twoheadleftarrow !_i\varphi$
Субъективный Лжец $SLL : K_i\neg\varphi \twoheadleftarrow !_i\varphi$
Субъективный Рыцарь $STT : K_i\varphi \twoheadleftarrow !_i\varphi$
«Грайсовский» Рыцарь $PTT : (K_i\varphi \wedge K_i\neg E_G\varphi) \twoheadleftarrow !_i\varphi$
Осторожный Лжец $CSLL : (K_i\neg\varphi \wedge K_i\neg E_G\neg\varphi) \twoheadleftarrow !_i\varphi$

Определение 2 (Синтаксис, $PALT^T$) *Пусть $T \subset E$ – множество типов, $\mathcal{A}$ – множество агентов, Var – множество пропозициональных переменных, тогда язык $PALT$ определяется следующей грамматикой:*

[1] Возможны и другие более сложные типы, зависящие и от доксатических состояний агентов, что полезно для философско-языковых приложений теории.

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \eta(i) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_i\varphi \mid [!_i\varphi]\psi$$

где $p \in Var$, $i \in \mathcal{A}$, $\eta \in T$.

Определение 3 *Моделью для языка PALT является следующая структура* $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i\in\mathcal{A}}, V, \lambda)$, *где*

- W *– множество возможных миров;*
- $\sim_i \subseteq W \times W$ *отношение достижимости для агента* i*;*
- $V : Var \mapsto \mathcal{P}(W)$ *– функция оценки;*
- $\lambda : W \times \mathcal{A} \mapsto T$ *– функция, сопоставляющая каждому агенту его тип в данном мире.*

Определение 4 *Тип как функция.*

1. *Тип можно рассматривать как функцию* $\eta(\varphi, a)$, *которая возвращает предусловие произнесения* φ *агентом* a.
2. *Например,* $LL(\varphi, a) = \neg\varphi$, *а* $TT(\varphi, a) = \varphi$.
3. *Тогда,* $\lambda : W \times \mathcal{A} \mapsto (\eta : For\mathcal{L} \times \mathcal{A} \to For\mathcal{L})$
4. *Выражение «*$\lambda(w, a)(\varphi, a)$*» обозначает формулу, которая является предусловием произнесения* φ *агентом* a, *тип которого* $\lambda(w, a)$.
5. *Например, пусть* $\lambda(w_1, a) = TT$, $\lambda(w_2, a) = LL$. *Тогда,* $\lambda(w_1, a)(\varphi, a) = \varphi$, *а* $\lambda(w_2, a)(\varphi, a) = \neg\varphi$

Определение 5 *Семантика*

- $\mathcal{M}, w \vDash \top$ *при любых условиях*
- $\mathcal{M}, w \vDash p$ *е.т.е.* $w \in V(p)$
- $\mathcal{M}, w \vDash \neg\varphi$ *е.т.е.* $\mathcal{M}, w \nvDash \varphi$
- $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \wedge \psi$ *е.т.е.* $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ *и* $\mathcal{M}, w \vDash \psi$
- $\mathcal{M}, w \vDash K_i\varphi$ *е.т.е.* $\forall w'(w \sim_i w' \to \mathcal{M}, w' \vDash \varphi)$
- $\mathcal{M}, w \vDash \eta(i)$ *е.т.е.* $\lambda(w, i) = \eta$
- $\mathcal{M}, w \vDash [!_a\varphi]\psi$ *е.т.е.* $\mathcal{M}, w \vDash \lambda(w, a)(\varphi, a) \Rightarrow \mathcal{M}|^{\varphi}_{a}, w \vDash \psi$

Определение 6 $\mathcal{M}|^{\varphi}_{a} = (W', \{\sim'_i\}_{i\in\mathcal{A}}, V', \lambda')$, *где*

- $W' = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \lambda(w, a)(\varphi, a)\}$
- $\sim'_i = \sim_i \cap (W' \times W')$
- $V' = V$
- $\lambda' = \lambda$

Определение 7 $\langle !_a\varphi\rangle\psi := \neg[!_a\varphi]\neg\psi$

Определение 8 *Решение Задачи от трех островитянах:*
$\mathcal{M}, w_{XYZ} \vDash \langle !_a LL(b)\rangle\langle !_b LL(c)\rangle\langle !_c(LL(a) \wedge LL(b))\rangle K_d(X(a) \wedge Y(b) \wedge Z(c))$

2 $PQLT^T$: логика публичных объявлений с вопросами и типами агентов

Определение 9 (Синтаксис $PQLT^T$**)** *Синтаксис языка* $PQLT^T$ *определяется следующей грамматикой:*

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \eta(i) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_i\varphi \mid [!_i\varphi]\psi \mid [?_i\varphi]\psi \mid [!_i]\varphi$$

где $p \in Var$, $i \in \mathcal{A}$, $\eta \in T$.

Определение 10 (Модель $PQLT^T$**)** *Семантика языка* $PQLT^T$ *задается моделью* $\mathcal{M} = W, \{\sim'_i\}_{i\in\mathcal{A}}, V', \lambda')$, *ограниченной некоторым контекстом* $\mu \in Form(PQLT^T) \cup \{\#\}$. *Контекст* $\mu = (a, \varphi)$ *означает, что агент a должен ответить на вопрос об истинности* φ, *контекст* $\mu = \#$ *означает, что никакоо вопроса не задано (пустой контекст).*

Определение 11 (Семантика $PQLT^T$**)** *Истинность формулы в модели для* $PQLT^T$ *определяется следующими условиями:*

- $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ *е.т.е.* $\mathcal{M}, w \vDash_{\#} \varphi$
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu \top$ *при любых условиях*
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu p$ *е.т.е.* $w \in V(p)$
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu \neg\varphi$ *е.т.е.* $\mathcal{M}, w \nvDash_\mu \varphi$
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu \varphi \wedge \psi$ *е.т.е.* $\mathcal{M}, w \vDash_\mu \varphi$ *и* $\mathcal{M}, w \vDash_\mu \psi$
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu K_i\varphi$ *е.т.е.* $\forall w'(w \sim_i w' \to \mathcal{M}, w' \vDash_\mu \varphi)$
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu \eta(i)$ *е.т.е.* $\lambda(w, i) = \eta$
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu [?_i\varphi]\psi$ *е.т.е.* $\mathcal{M}, w \vDash_{(i,\varphi)} \psi$
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu [!_i\varphi]\psi$ *е.т.е. 1)* $\mu = (i, \pm\varphi)$ *и 2)* $\mathcal{M}, w \vDash_\mu \lambda(w, i)(\varphi, i)$ *влекут* $\mathcal{M}|^{i}_{\varphi}, w \vDash_\mu \psi$, *где* $\mu = (i, \pm\varphi)$ *означает, что выполняется одно из условий:* $\mu = (i, \varphi)$ *или* $\mu = (i, \neg\varphi)$
- $\mathcal{M}, w \vDash_\mu [!_i]\psi$ *е.т.е.* $\mathcal{M}, w \vDash_\mu [!_i\varphi]\psi$ *и* $\mathcal{M}, w \vDash_\mu [!_i\neg\varphi]\psi$

Определение 12 *Формализация задачи*
Варианты вопросов:

- $?_a\big([?_a p]\langle !_a p\rangle\top\big)$*: «Скажешь ли ты мне 'да', если я спрошу тебя 'ведет ли твоя дорога к свободе?'»*
- $?_a\big([?_b p]\langle !_b p\rangle\top\big)$*: «Скажет ли мне другой островитянин 'да', если я спрошу его 'ведет ли твоя дорога к свободе?'»*