Эпистемические модели игр и эпистемические характеристики решений[1]

1 Некоторые понятия

1.1 Исключение Строго Доминируемых Стратегий

Iterated Deletion of Strictly Dominated Strategies, IDSDS

Определение 1 *Смешанная стратегия* σ_i ***(строго) доминирует*** *чистую стратегию* s_i' *т.т.е.* $\forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$.

Пример 1 *Применить IDSDS*

	X	Y	Z
A	3,2	3,1	0,1
B	2,3	2,2	3,1
C	1,2	1,2	4,1
D	0,2	0,3	1,3

Пример 2 *Применить IDSDS*

	X	Y	Z
A	1,1	0,2	0,4
B	0,2	5,0	1,6
C	0,2	1,1	2,1

Пример 2

- Y vs. $[{}^1\!/_2 X, {}^1\!/_2 Z]$
- B vs. $[{}^1\!/_3 A, {}^2\!/_3 C]$

[1]НУГ «Формальная философия», «Динамические модели в аналитической метафизике и философии языка» (2017, 17-05-0040)

1.2 Коррелированное равновесие

Понятие предложено Р.Ауманном[2]. Коррелированное равновесие предполагает, что игроки действуют согласованно в соответствии с распределением вероятностей на множестве исходов. Каждый из игроков получает сигнал, который советует ему, что делать (конкретный сигнал может быть частным, но типы сигналов и вероятности их использования являются общим знанием).

R. Myerson:

> «if there is intelligent life on other planets, in a majority of them, they would have discovered correlated equilibrium before Nash equilibrium»

Пример 3 *Компромисс и "Семейный спор"*

	L	R
T	1,2	0,0
B	0,0	2,1

	L	R
T	$^1\!/_2$	0
B	0	$^1\!/_2$

Пример 4 *Светофор и "Chicken"*

	L	R
T	6,6	2,7
B	7,2	0,0

	L	R
T	$^1\!/_3$	$^1\!/_3$
B	$^1\!/_3$	0

1.2.1 Определение

Определение 2 *Для любого распределения вероятностей* $p \in \Delta(S)$ *определим игру* $\Gamma^*(p)$

- *внешний наблюдатель ("доброжелательный диктатор") выбирает профиль стратегий в соответствии с распределением* p
- *каждый игрок* $i \in N$ *узнает о своей рекомендованной стратегии* s_i, *но может не знать о рекомендации другим игрокам* s_{-i}
- *каждый игрок i выбирает стратегию* $s_i' \in S_i$ *(то есть, игрок может не следовать рекомендации)*

[2]*Aumann R.J.*. Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality // Econometrica. 1987. Vol. 55, № 1. P. 1–18.

- *для каждого игрока функция полезности определяется через реальные действия, а не рекомендованные, т.е. как* $u_i(s'_1, ..., s'_n)$

Определение 3 *Стратегией игрока i в игре $\Gamma^*(p)$ будем называть функцию*
$\tau_i : S_i \mapsto S_i$*, которая сопоставляет каждой рекомендации реальное действие* $\tau_i(s_i) \in S_i$

Определение 4 $\tau_i^*(s_i) = s_i$ *– стратегия игрока, в которой он следует рекомендации;*
τ^* *– профиль стратегий, в котором все игроки следуют рекомендациям*

Определение 5 $p(s_{-i} \mid s_i) = \frac{p(s_i, s_{-i})}{\sum\limits_{s'_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s'_{-i})}$

Определение 6 *Распределение вероятностей $p \in \Delta(S)$ является* ***коррелированным равновесием*** *е.т.е. профиль стратегий τ^* в игре $\Gamma^*(p)$ является равновесием Нэша. Т.е.:*

$$\forall i \in N \;\; \forall s, s' \in S_i : \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i} \mid s_i) \cdot u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i} \mid s_i) \cdot u_i(s'_i, s_{-i})$$

2 Эпистемическая модель игры

Определение 7 $\mathcal{M} = (W, \{\Pi_i\}_{i \in N}, \mathfrak{s})$

- W *- множество ситуаций (возможных миров)*
- Π_i *– разбиение* W[3]
- $\mathfrak{s} : W \mapsto S$[4]

Определение 8 $K_i : \mathcal{P}(W) \mapsto \mathcal{P}(W)$

Определение 9 $E \subseteq W$ *- событие (пропозиция)*

Определение 10 *Событие E имеет место в мире w е.т.е.* $w \in E$

Определение 11 $K_i(E) = \{w \mid \Pi_i(E) \subseteq E\}$

[3] Пусть $\Pi_i(w)$ обозначает элемент разбиения, содержащий w
[4] Пусть $\mathfrak{s}_i(w)$ обозначает стратегию i-го игрока в профиле стратегий $\mathfrak{s}(w)$

Определение 12 $K_i(E) = \{w \mid [w]_i \subseteq E\}$

Пример 5 $U = \{w_1, w_2\}$
$\Pi_a = \{\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}\}$
$\Pi_b = \{\{w_1, w_3\}, \{w_2, w_4\}\}$

$$\mathfrak{s} : \begin{bmatrix} w_1 \mapsto (u, l) \\ w_2 \mapsto (u, r) \\ w_3 \mapsto (d, l) \\ w_4 \mapsto (d, r) \end{bmatrix}$$

Определение 13 *Будем называть модель ex interim е.т.е.*
$\forall i \in N \;\; \forall w \forall w' \in W : \;\; w' \in \Pi_i(w) \rightarrow \mathfrak{s}_i(w') = \mathfrak{s}_i(w)$

Определение 14 *Некоторые свойства:*

- $K_i(W) = W$
- $K_i(X) \subseteq X$
- $K_i(K_i(X)) = K_i(X)$
- $K_i(X) \cap K_i(Y) = K_i(X \cap Y)$
- $\overline{K_i(X)} = K_i(\overline{K_i(X)})$

Определение 15 $C_G(E) \coloneqq E \cap K_G(E) \cap K_G(K_G(E)) \cap K_G(K_G(K_G(E))) \cap$ ...

3 Доксатическая модель

Определение 16 $\mathcal{M} = (W, \{\Pi_i\}_{i \in N}, \preceq_{i \in N}, \mathfrak{s})$

- W *- множество ситуаций (возможных миров)*
- Π_i *– разбиение* W
- $\preceq_i$ *– отношение на W (рефлексивное и транзитивное)*
- $\mathfrak{s} : W \mapsto S$

Определение 17 *Belief:* $B_i(E) = \{w \mid Max_{\preceq_i}(\Pi_i(w)) \subseteq E\}$

Пример 6
- $B_a(R)$, *где* $R = \{w_2, w_4\}$
- $\overline{B_b(U)} \cap \overline{B_b(D)}$

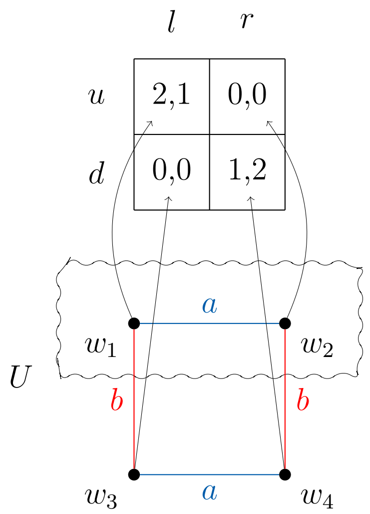

Рис. 1: "Эпистемическая модель-1"

4 Вероятностная модель

Определение 18 $\mathcal{M} = (W, \{\Pi_i\}_{i\in N}, \{P_i\}_{i\in N})$, *где* W *- множество возможных миров,* Π_i *- разбиение* W*,* $P_i : \mathcal{P}(W) \mapsto [0,1]^5$.

Определение 19 $p_i^w(E) = p_i(E \mid \Pi_i(w)) = \frac{P_i(E\cap\Pi_i(w))}{P_i(\Pi_i(w))}$

Определение 20 $B_i^d(E) = \{w \mid p_i^w(E) = d\}$

5 Некоторые понятия

Определение 21 $[s] \coloneqq \{w \mid \mathfrak{s}(w) = s\}$

Определение 22 $EU_i^w(s_i) \coloneqq \sum\limits_{s'_{-i}\in S_{-i}} p_i^w([s'_{-i}]) \cdot u_i(s_i, s'_{-i})$, *где* $s_i \in S_i$

Пример 7 *Рис.4.*

- $p_a^{w_1}([l]) = \frac{[l]\cap[w_1]_a}{[w_1]_a} = \frac{\{w_1,w_2\}\cap\{w_1,w_3,w_5\}}{\{w_1,w_3,w_5\}} = \frac{\{w_1\}}{\{w_1,w_3,w_5\}} = {}^{0.1}/_{0.5} = {}^{1}/_{5}$
- $p_a^{w_1}([r]) = \frac{[r]\cap[w_1]_a}{[w_1]_a} = \frac{\{w_3,w_4,w_5,w_6\}\cap\{w_1,w_3,w_5\}}{\{w_1,w_3,w_5\}} = \frac{\{w_3,w_5\}}{\{w_1,w_3,w_5\}} = {}^{0.4}/_{0.5} = {}^{4}/_{5}$

[5] $\sum\limits_{w'\in W} P_i(w') = 1$ и $\forall w' \in W : P_i(\Pi(w)) > 0$).

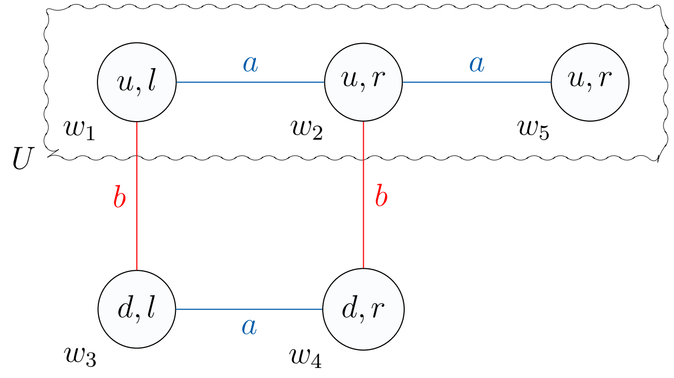

Рис. 2: "Эпистемическая модель-2"

6 Виды групповой рациональности

Определение 23 *Виды групповой рациональности:*

1. $Rat_i \coloneqq \{w \mid \forall s'_i \in S_i : EU_i^w(\mathfrak{s}_i(w)) \geq EU_i^w(s'_i)\}$, *множество миров, в которых i-й игрок реализует рациональную стратегию (с точки зрения максимизации ожидаемой полезности)*
2. $Rat = \bigcap_{i\in N} Rat_i$, *множество миров, в котором каждый игрок реализует рациональную стратегию*
3. $CKR = C_G(Rat)$, *множество миров, в которых тот факт, что каждый из игроков реализует рациональную стратегию, является общим знанием*

7 Эпистемические характеристики решений игры

Определение 24 *Определим последовательность множеств стратегий* D_i^0, D_i^1, ...

- $D_i^0 = S_i$
- $D_i^{n+1} = \{s_i \mid \neg\exists\sigma_i \in \Sigma_i \forall s_{-i} \in D_{-i}^n : u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})\}$
- $D_i = lim_{n\to\infty} D_i^n$

Определение 25 *IDSDS*
Если $w \in CKR$, *то* $\mathfrak{s}(w) \in D$

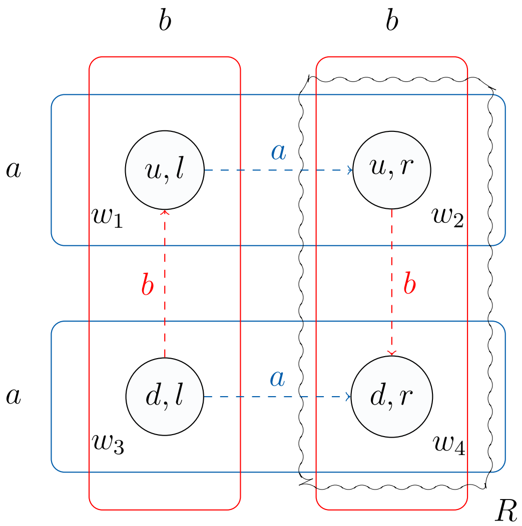

Рис. 3: "Доксатическая модель"

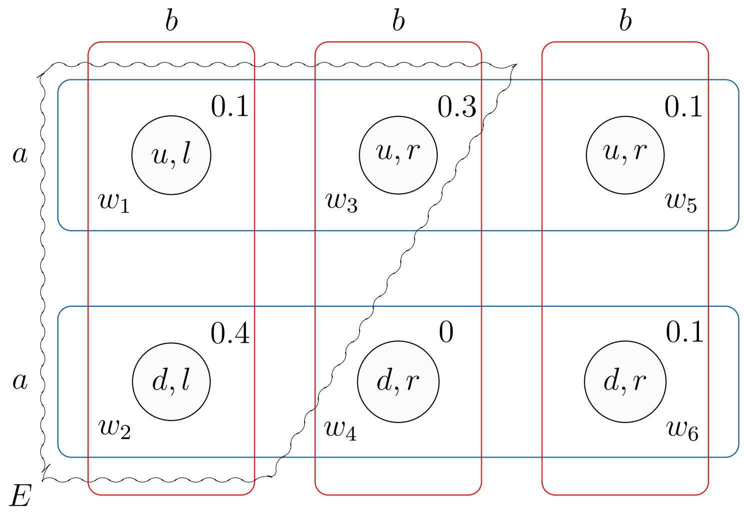

Рис. 4: "Вероятностная модель"

Определение 26 *Равновесие Нэша (в чистых стратегиях)*
Если $w \in Rat \cap E_G([\mathfrak{s}(w)])$, *то* $\mathfrak{s}(w) \in NE$

Определение 27 *MSNE (равновесие Нэша в смешанных стратегиях)*

1. *2 игрока:*
   - *mutual knowledge of rationality:* $E_G(Rat))$
   - *mutual knowledge of conjectures*
2. *больше 2 игроков:*
   - *mutual knowledge of rationality:* $E_G(Rat)$
   - *mutual knowledge of conjectures*
   - *common prior*

Определение 28 *Коррелированное равновесие:*

- *Common knowledge of rationality:* CKR
- *Common prior*