

## Некоторые элементарные понятия теории игр<sup>1</sup>

**Определение 1** Будем называть **игрой в стратегической (нормальной, матричной) форме** тройку  $G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ , где

- $N$  – множество игроков
- $S_i$  – множество стратегий  $i$ -го игрока
- $S = \prod_{i \in N} S_i$  – множество всех профилей стратегий (исходов)
- $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \mapsto \mathbb{R}$  – функция полезности (платежная функция)<sup>2</sup>.

**Определение 2** Пусть  $s_{-i}$  обозначает профиль стратегий всех игроков кроме  $i$ -го игрока, т.е.  $s_{-i} := (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ .

**Определение 3**  $S_{-i} := \prod_{j \neq i} S_j$ , где  $i, j \in N$ .

**Определение 4** Будем говорить, что стратегия  $s_i$  является **наилучшим ответом** на  $s_{-i}$  е.т.е.  $u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, s_{-i})$ .

**Определение 5** Множество **наилучших ответов**  $i$ -го игрока на профиль стратегий  $s_{-i}$  будем обозначать как  $BR_i(s_{-i})$ .

$$BR_i(s_{-i}) = \{s' \in S_i \mid \forall s''_i \in S_i : u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s''_i, s_{-i})\} = \arg \max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, s_{-i}).$$

**Определение 6** Профиль стратегий  $s = (s_i, s_{-i})$  является **равновесием Нэша** е.т.е.

$$\forall i \in N : s_i \in BR_i(s_{-i}).$$

**Определение 7** Профиль стратегий  $s = (s_i, s_{-i})$  является **равновесием Нэша** е.т.е.

$$\forall i \in N \forall s'_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}). \text{ (другой вариант определения)}$$

**Определение 8** Профиль стратегий  $s = (s_i, s_{-i})$  является **строгим равновесием Нэша** е.т.е.  $\forall i \in N \forall s'_i \neq s_i : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$ .

**Определение 9** Профиль стратегий  $s$  **доминирует по Парето** профиль стратегий  $s'$  е.т.е. 1)  $\forall i \in N : u_i(s) \geq u_i(s')$  и 2)  $\exists j \in N : u_j(s) > u_j(s')$ .

<sup>1</sup>НУГ «Формальная философия», проект «Динамические модели в аналитической метафизике и философии языка» (2017, 17-05-0040).

<sup>2</sup> $\mathbb{R}$  – множество действительных чисел

**Определение 10** Профиль стратегий  $s = (s_1, \dots, s_n)$  является **Парето-оптимальным** е.т.е. не существует профиля стратегий, который бы доминировал его по Парето.

**Определение 11** Стратегия  $s_i$  (**слабо**) **доминирует** стратегию  $s'_i$  е.т.е.

$$1) \forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ и } 2) \exists s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}).$$

**Определение 12** Стратегия  $s_i$  (**строго**) **доминирует** стратегию  $s'_i$  е.т.е.

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}).$$

**Определение 13** Будем называть представлением  $i$ -го игрока  $\theta_{-i} \in \Delta(S_{-i})$ <sup>3</sup>.

**Определение 14**  $u_i(s_i, \theta_{-i}) = \sum_{s'_{-i} \in S_{-i}} \theta(s'_{-i}) \cdot u_i(s_i, s'_{-i})$  – полезность стратегии  $s_i$  при представлении  $\theta_{-i}$ .

**Определение 15** Стратегия  $s_i$  является **наилучшим ответом на представление**  $\theta_{-i}$  е.т.е.  $u_i(s_i, \theta_{-i}) = \max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, \theta_{-i})$ .  $BR_i(\theta_{-i})$  – множество всех наилучших ответов  $i$ -го игрока на представление  $\theta_{-i}$ .

**Определение 16** Будем называть  $\sigma_i \in \Delta(S_i)$  **смешанной стратегией**  $i$ -го игрока.

Пусть  $\Sigma_i = \Delta(S_i)$  – множество всех смешанных стратегий  $i$ -го игрока;  $\Sigma = \prod_{i \in N} \Sigma_i$  – множество всех профилей смешанных стратегий.

**Определение 17** Пусть  $\sigma_i(s_i)$  вероятность, которую смешанная стратегия  $\sigma_i$  приписывает чистой стратегии  $s_i$ .

$$\text{Определение 18 } u_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{(s'_1, \dots, s'_n) \in S} u_i(s'_1, \dots, s'_n) \cdot \sigma_1(s'_1) \cdot \dots \cdot \sigma_n(s'_n).$$

**Определение 19** Профиль стратегий  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  является **равновесием Нэша (в смешанных стратегиях)** е.т.е.  $\forall i \in N \forall \sigma'_i \in \Sigma_i : u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ .

<sup>3</sup> $\Delta(X) = \{f : X \mapsto [0, 1] \mid \sum_{x' \in X} f(x') = 1\}$

**Определение 20** Будем называть *игрой с совершенной информацией* (в развернутой форме) набор  $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N})$ , где

- $N$  - множество игроков
- $A$  - множество действий
- $H$  - множество нетерминальных вершин
- $Z$  - множество терминальных вершин
- $\chi : H \mapsto \mathcal{P}(A)$  - функция сопоставляющая нетерминальной вершине множество действий
- $\rho : H \mapsto N$  - функция, определяющая, кто из игроков совершает действие в этой вершине
- $\sigma : H \times A \mapsto H \cup Z$ , - функция, сопоставляющая каждой вершине и у действию другую вершину, такая, что  $\forall h' \forall h'' \forall a' \forall a'' [\sigma(h', a') = \sigma(h'', a') \rightarrow (h' = h'' \wedge a' = a'')]$
- $u_i : Z \mapsto \mathbb{R}$  - платежная функция.

**Определение 21** Пусть множество чистых стратегий  $i$ -го игрока  $S_i = \prod_{h' \in H, \rho(h')=i} \chi(h')$ , т.е. все варианты сочетания действий этого игрока.

**Определение 22** Будем называть *игрой с несовершенной информацией* (в развернутой форме) набор  $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N}, I)$ , где  $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N})$  - игра с совершенной информацией,  $I = (I_1, \dots, I_n)$ , где  $I_i = (I_{i,1}, \dots, I_{i,k_i})$  - разбиение множества  $\{h \in H \mid \rho(h) = i\}$  такое, что

$\forall h \forall h' \forall i \forall j ((h \in I_{i,j} \wedge h' \in I_{i,j}) \rightarrow (\chi(h) = \chi(h') \wedge \rho(h) = \rho(h'))$ , т.е., в вершинах информационного множества должен быть один и тот же игрок и одни и те же возможные действия.

**Определение 23** Пусть  $\chi(I_{i,j})$  обозначает множество действий, доступных в информационном множестве  $I_{i,j}$ . Тогда множество *чистых стратегий*  $i$ -го игрока определяется как  $S_i = \prod_{I_{i,j} \in I_i} \chi(I_{i,j})$ .

**Определение 24** Будем называть  $b_i \in \prod_{I_{i,j} \in I_i} \Delta(\chi(I_{i,j}))$  *поведенческой стратегией*  $i$ -го игрока.

**Определение 25** Пусть  $B_i = \prod_{I_{i,j} \in I_i} \Delta(\chi(I_{i,j}))$  обозначает множество всех поведенческих стратегий  $i$ -го игрока,  $B = B_1 \times \dots \times B_n$  - множество всех профилей поведенческих стратегий.

## Примеры игр в стратегической форме

**Пример 1 "Камень, Ножницы, Бумага"**

	Камень	Ножницы	Бумага
Камень	0, 0	1, -1	-1, 1
Ножницы	-1, 1	0, 0	1, -1
Бумага	1, -1	-1, 1	0, 0

**Пример 2 "Дилемма заключенного" ("the Prisoner's Dilemma")**

	Молчать	Сдать
Молчать	-2, -2	-10, 0
Сдать	0, -10	-5, -5

**Пример 3 "Орлянка" ("Matching Pennies")**

	О	Р
О	1, -1	-1, 1
Р	-1, 1	1, -1

**Пример 4 "Семейный спор-1" ("the Battle of the Sexes")**

	Б	Ф
Б	2, 3	0, 0
Ф	1, 1	3, 2

**Пример 5 "Семейный спор-2"**

	Б	Ф
Б	1, 2	0, 0
Ф	0, 0	2, 1

**Пример 6 "Координация-1" ("Coordination Game")**

	L	R
T	1, 1	0, 0
B	0, 0	1, 1

**Пример 7 "Координация-2"**

	L	R
T	2, 2	0, 0
B	0, 0	1, 1

**Пример 8 "Охота на оленей" ("Stag Hunt")**

	О	З
О	2, 2	0, 1
З	1, 0	1, 1

**Пример 9 "Цыпленок" ("Chicken")**

	C	E
C	0, 0	-1, 1
E	1, -1	-10, -10

**Пример 10 "Ястребы и Голуби"**

	H	D
H	-2, -2	6, 0
D	0, 6	3, 3

## Эволюционно стабильные стратегии

**Определение 26** Рассмотрим симметричную игру для двух игроков. Стратегия  $s^*$  будет называться *эволюционно стабильной* е.т.е.

для любого игрока  $i$  и для любой стратегии  $s \neq s^*$  верно, что

1)  $u_i(s^*, s^*) > u_i(s, s^*)$

или

2)  $u_i(s^*, s^*) = u_i(s, s^*)$  и  $u_i(s^*, s) > u_i(s, s)$

**Пример 11**

	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	3,3	1,4
<i>d</i>	4,1	2,2

NE: (d,d)

ESS: *d*

**Пример 12**

	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>a</i>	2,2	1,2
<i>b</i>	2,1	2,2

NE: (a,a), (b,b)

ESS: *b*

**Пример 13**

	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	2,2	1,2
<i>d</i>	2,1	0,0

NE: (c,c)

ESS: *c*

**Пример 14**

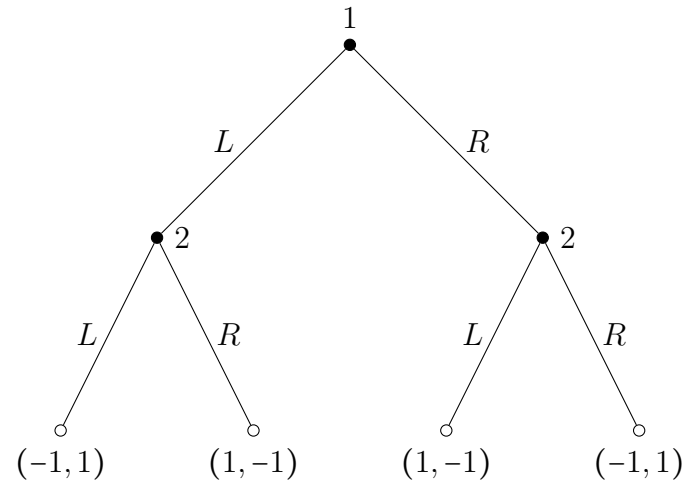
	<i>h</i>	<i>d</i>
<i>h</i>	0,0	7,2
<i>d</i>	2,7	6,6

NE: (d, h), (h,d)

ESS:  $[\frac{2}{3}d, \frac{1}{3}h]$

## Примеры игр в развернутой форме

**Пример 15** Игра с совершенной информацией



**Пример 16** Игра с несовершенной информацией

