Некоторые элементарные понятия теории игр[1]

Определение 1 *Будем называть **игрой в стратегической (нормальной, матричной) форме** тройку* $G = (N, \{S_i\}_{i\in N}), \{u_i\}_{i\in N})$ *, где*
– N *– множество игроков*
– S_i *– множество стратегий* i*-го игрока*
– $S = \bigtimes_{i\in N} S_i$ *– множество всех профилей стратегий (исходов)*
– $u_i : S_1 \times ... \times S_n \mapsto \mathbb{R}$ *– функция полезности (платежная функция)*[2]*.*

Определение 2 *Пусть* s_{-i} *обозначает профиль стратегий всех игроков кроме* i*-го игрока, т.е.* $s_{-i} := (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$*.*

Определение 3 $S_{-i} := \bigtimes_{i\neq j} S_j$*, где* $i, j \in N$*.*

Определение 4 *Будем говорить, что стратегия* s_i *является **наилучшим ответом** на* s_{-i} *е.т.е.* $u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s'_i\in S_i} u_i(s'_i, s_{-i})$*.*

Определение 5 ***Множество наилучших ответов*** i*-го игрока на профиль стратегий* s_{-i} *будем обозначать как* $BR_i(s_{-i})$**.**
$BR_i(s_{-i}) = \{s' \in S_i \mid \forall s''_i \in S_i : u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s''_i, s_{-i})\} = arg \max_{s'\in S_i} u_i(s'_i, s_{-i})$*.*

Определение 6 *Профиль стратегий* $s = (s_i, s_{-i})$ *является **равновесием Нэша** е.т.е.* $\forall i \in N: \ s_i \in BR_i(s_{-i})$*.*

Определение 7 *Профиль стратегий* $s = (s_i, s_{-i})$ *является **равновесием Нэша** е.т.е.* $\forall i \in N \ \forall s'_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$*. (другой вариант определения)*

Определение 8 *Профиль стратегий* $s = (s_i, s_{-i})$ *является **строгим равновесием Нэша** е.т.е.* $\forall i \in N \ \forall s'_i \neq s_i : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$*.*

Определение 9 *Профиль стратегий* s ***доминирует по Парето*** *профиль стратегий* s' *е.т.е. 1)* $\forall i \in N : u_i(s) \geq u_i(s')$ *и 2)* $\exists j \in N : u_j(s) > u_j(s')$*.*

Определение 10 *Профиль стратегий* $s = (s_1, ..., s_n)$ *является **Парето-оптимальным** е.т.е. не существует профиля стратегий, который бы доминировал его по Парето.*

Определение 11 *Стратегия* s_i ***(слабо) доминирует*** *стратегию* s'_i *е.т.е.*
1) $\forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ *и 2)* $\exists s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$*.*

Определение 12 *Стратегия* s_i ***(строго) доминирует*** *стратегию* s'_i *е.т.е.*
$\forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$*.*

Определение 13 *Будем называть представлением* i*-го игрока* $\theta_{-i} \in \Delta(S_{-i})$[3]*.*

Определение 14 $u_i(s_i, \theta_{-i}) = \sum_{s'_{-i}\in S_{-i}} \theta(s'_{-i}) \cdot u_i(s_i, s'_{-i})$ *- полезность стратегии* s_i *при представлении* θ_{-i}*.*

Определение 15 *Стратегия* s_i *является **наилучшим ответом на представление*** θ_{-i} *е.т.е.* $u_i(s_i, \theta_{-i}) = \max_{s'_i\in S_i} \ u_i(s'_i, \theta_{-i})$*.* $BR_i(\theta_{-i})$ *– множество всех наилучших ответов* i*-го игрока на представление* θ_{-i}*.*

[1] НУГ «Формальная философия», проект «Динамические модели в аналитической метафизике и философии языка» (2017, 17-05-0040).

[2] $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел

[3] $\Delta(X) = \{f : X \mapsto [0,1] \mid \sum_{x'\in X} f(x') = 1\}$

Определение 16 *Будем называть* $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ ***смешанной стратегией*** *i-го игрока.*
Пусть $\Sigma_i = \Delta(S_i)$ *– множество всех смешанных стратегий i-го игрока;*
$\Sigma = \bigtimes_{i \in N} \Sigma_i$ *– множество всех профилей смешанных стратегий.*

Определение 17 *Пусть* $\sigma_i(s_i)$ *вероятность, которую смешанная стратегия* σ_i *приписывает чистой стратегии* s_i.

Определение 18 $u_i(\sigma_1, ..., \sigma_n) = \sum\limits_{(s'_1, ..., s'_n) \in S} u_i(s'_1, ... s'_n) \cdot \sigma_1(s'_1) \cdot ... \cdot \sigma_n(s'_n)$.

Определение 19 *Профиль стратегий* $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ *является* ***равновесием Нэша (в смешанных стартегиях)*** *е.т.е.* $\forall i \in N\ \forall \sigma'_i \in \Sigma_i : u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$.

Определение 20 *Будем называть* ***игрой с совершенной информацией*** *(в развернутой форме) набор* $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N})$*, где*
– N *– множество игроков*
– A *– множество действий*
– H *– множество нетерминальных вершин*
– Z *– множество терминальных вершин*
– $\chi : H \mapsto \mathcal{P}(A)$ *– функция сопоставляющая нетерминальной вершине множество действий*
– $\rho : H \mapsto N$ *– функция, определяющая, кто из игроков совершает действие в этой вершине*
– $\sigma : H \times A \mapsto H \cup Z$*, – функция, сопоставляющая каждой вершине и действию другую вершину, такая, что*
$\forall h' \forall h'' \forall a' \forall a'' [\sigma(h', a') = \sigma(h', a') \to (h' = h'' \wedge a' = a'')]$
– $u_i : Z \mapsto \mathbb{R}$ *– платежная функция.*

Определение 21 *Пусть множество чистых стратегий i-го игрока*
$S_i = \bigtimes_{h' \in H,\ \rho(h') = i} \chi(h')$*, т.е. все варианты сочетания действий этого игрока.*

Определение 22 *Будем называть* ***игрой с несовершенной информацией*** *(в развернутой форме) набор* $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N}, I)$*, где* $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N})$ *– игра с совершенной информацией,* $I = (I_1, ..., I_n)$*, где* $I_i = (I_{i,1}, ..., I_{i,k_i})$ *– разбиение множества* $\{h \in H \mid \rho(h) = i\}$ *такое, что* $\forall h \forall h' \forall i \forall j((h \in I_{i,j} \wedge h' \in I_{i,j}) \to (\chi(h) = \chi(h') \wedge \rho(h) = \rho(h')))$*, т.е., в вершинах информационного множества должен быть один и тот же игрок и одни и те же возможные действия.*

Определение 23 *Пусть* $\chi(I_{i,j})$ *обозначает множество действий, доступных в информационном множестве* $I_{i,j}$*. Тогда множество* ***чистых статегий*** *i-го игрока определяется как* $S_i = \bigtimes_{I_{i,j} \in I_i} \chi(I_{i,j})$.

Определение 24 *Будем называть* $b_i \in \bigtimes_{I_{i,j} \in I_i} \Delta(\chi(I_{i,j}))$ ***поведенческой стратегией*** *i-го игрока.*

Определение 25 *Пусть* $\mathcal{B}_i = \bigtimes_{I_{i,j} \in I_i} \Delta(\chi(I_{i,j}))$ *обозначает множество всех поведенческих стратегий i-го игрока,* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times ... \times \mathcal{B}_n$ *– множество всех профилей поведенческих стратегий.*

Примеры игр в стратегической форме

Пример 1 ***"Камень, Ножницы, Бумага"***

	Камень	***Ножницы***	***Бумага***
Камень	$0,0$	$1,-1$	$-1,1$
Ножницы	$-1,1$	$0,0$	$1,-1$
Бумага	$1,-1$	$-1,1$	$0,0$

Пример 2 ***"Дилемма заключенного"("the Prisoner's Dilemma")***

	Молчать	***Сдать***
Молчать	$-2,-2$	$-10,0$
Сдать	$0,-10$	$-5,-5$

Пример 3 ***"Орлянка"***
("Matching Pennies")

	O	***P***
O	$1,-1$	$-1,1$
P	$-1,1$	$1,-1$

Пример 4 ***"Семейный спор-1"***
("the Battle of the Sexes")

	Б	***Ф***
Б	$2,3$	$0,0$
Ф	$1,1$	$3,2$

Пример 5 ***"Семейный спор-2"***

	Б	***Ф***
Б	$1,2$	$0,0$
Ф	$0,0$	$2,1$

Пример 6 ***"Координация-1"***
("Coordination Game")

	L	***R***
T	$1,1$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

Пример 7 ***"Координация-2"***

	L	***R***
T	$2,2$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

Пример 8 ***"Охота на оленей"***
("Stag Hunt")

	О	***З***
О	$2,2$	$0,1$
З	$1,0$	$1,1$

Пример 9 ***"Цыпленок"("Chicken")***

	C	***E***
C	$0,0$	$-1,1$
E	$1,-1$	$-10,-10$

Пример 10 ***"Ястребы и Голуби"***
("Hawk-Dove")

	H	***D***
H	$-2,-2$	$6,0$
D	$0,6$	$3,3$

Эволюционно стабильные стратегии

Определение 26 *Рассмотрим симметричную игру для двух игроков. Стратегия s^* будет называться* **эволюционной стабильной** *е.т.е. для любого игрока i и для любой стратегии $s \neq s^*$ верно, что*
1) $u_i(s^*,s^*) > u_i(s,s^*)$
или
2) $u_i(s^*,s^*) = u_i(s,s^*)$ *и* $u_i(s^*,s) > u_i(s,s)$

Пример 11

	c	***d***
c	$3,3$	$1,4$
d	$4,1$	$2,2$

NE: **(d,d)**
ESS: d

Пример 12

	a	***b***
a	$2,2$	$1,2$
b	$2,1$	$2,2$

NE: (a,a), **(b,b)**
ESS: b

Пример 13

	c	***d***
c	$2,2$	$1,2$
d	$2,1$	$0,0$

NE: (c,c)
ESS: c

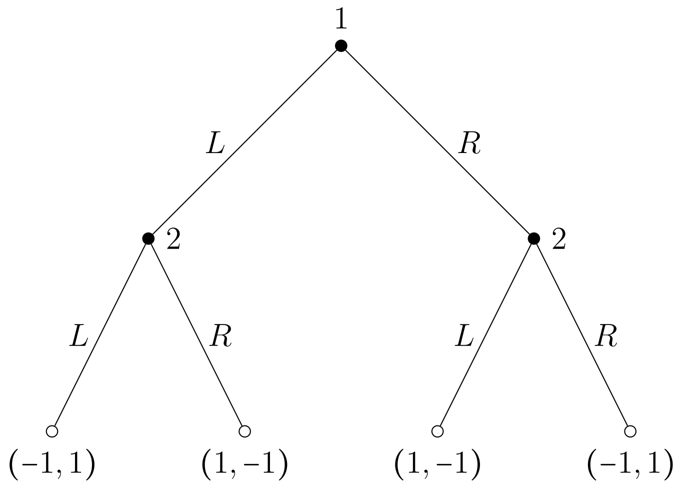
Пример 14

	h	***d***
h	$0,0$	$7,2$
d	$2,7$	$6,6$

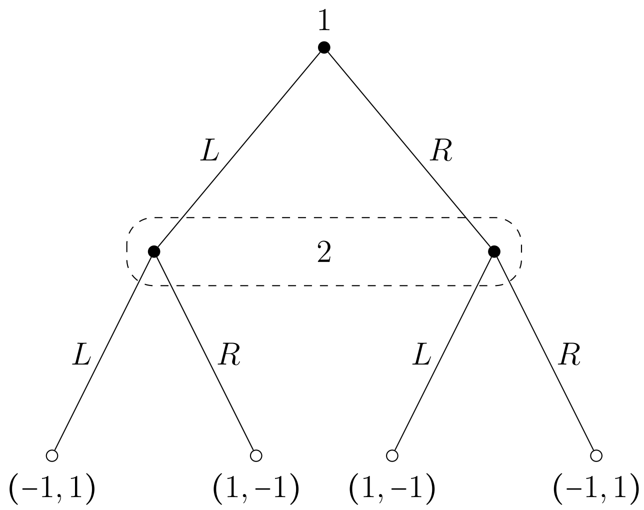
NE: **(d, h)**, **(h,d)**
ESS: $[{}^2/_3 d, {}^1/_3 h]$

Примеры игр в развернутой форме

Пример 15 ***Игра с совершенной информацией***



Пример 16 ***Игра с несовершенной информацией***



-