Некоторые элементарные понятия теории игр[1]

1 *Будем называть* ***игрой в стратегической (нормальной, матричной) форме*** *тройку* $G = (N, \{S_i\}_{i \in N}), \{u_i\}_{i \in N})$, *где*
– N – *множество игроков*
– S_i – *множество стратегий* i*-го игрока*
– $S = \bigtimes_{i \in N} S_i$ – *множество всех профилей стратегий (исходов)*
– $u_i : S_1 \times ... \times S_n \mapsto \mathbb{R}$ – *функция полезности (платежная функция)*[2].

2 *Пусть* s_{-i} *обозначает профиль стратегий всех игроков кроме* i*-го игрока, т.е.* $s_{-i} := (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$.

3 $S_{-i} := \bigtimes_{i \neq j} S_j$, *где* $i, j \in N$.

4 *Будем говорить, что стратегия* s_i *является* ***наилучшим ответом*** *на* s_{-i} *е.т.е.* $u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, s_{-i})$.

5 ***Множество наилучших ответов*** i*-го игрока на профиль стратегий* s_{-i} *будем обозначать как* $BR_i(s_{-i})$.
$BR_i(s_{-i}) = \{s' \in S_i \mid \forall s''_i \in S_i : u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s''_i, s_{-i})\} = arg \max_{s' \in S_i} u_i(s'_i, s_{-i})$.

6 *Профиль стратегий* $s = (s_i, s_{-i})$ *является* ***равновесием Нэша*** *е.т.е.* $\forall i \in N : \ s_i \in BR_i(s_{-i})$.

7 *Профиль стратегий* $s = (s_i, s_{-i})$ *является* ***равновесием Нэша*** *е.т.е.* $\forall i \in N \ \forall s'_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$. *(другой вариант определения)*

8 *Профиль стратегий* $s = (s_i, s_{-i})$ *является* ***строгим равновесием Нэша*** *е.т.е.* $\forall i \in N \ \forall s'_i \neq s_i : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

9 *Профиль стратегий* s ***доминирует по Парето*** *профиль стратегий* s' *е.т.е. 1)* $\forall i \in N : u_i(s) \geq u_i(s')$ *и 2)* $\exists j \in N : u_j(s) > u_j(s')$.

10 *Профиль стратегий* $s = (s_1, ..., s_n)$ *является* ***Парето-оптимальным*** *е.т.е. не существует профиля стратегий, который бы доминировал его по Парето.*

[1] НУГ «Формальная философия», проект «Динамические модели в аналитической метафизике и философии языка» (2017, 17-05-0040).
[2] $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел

11 *Стратегия* s_i ***(слабо) доминирует*** *стратегию* s'_i *е.т.е.*
1) $\forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ *и 2)* $\exists s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

12 *Стратегия* s_i ***(строго) доминирует*** *стратегию* s'_i *е.т.е.*
$\forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

13 *Будем называть представлением* i*-го игрока* $\theta_{-i} \in \Delta(S_{-i})$[3].

14 $u_i(s_i, \theta_{-i}) = \sum_{s'_{-i} \in S_{-i}} \theta(s'_{-i}) \cdot u_i(s_i, s'_{-i})$ *- полезность стратегии* s_i *при представлении* θ_{-i}.

15 *Стратегия* s_i *является* ***наилучшим ответом на представление*** θ_{-i} *е.т.е.* $u_i(s_i, \theta_{-i}) = \max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, \theta_{-i})$. $BR_i(\theta_{-i})$ – *множество всех наилучших ответов* i*-го игрока на представление* θ_{-i}.

16 *Будем называть* $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ ***смешанной стратегией*** i*-го игрока.*
Пусть $\Sigma_i = \Delta(S_i)$ – *множество всех смешанных стратегий* i*-го игрока;*
$\Sigma = \bigtimes_{i \in N} \Sigma_i$ – *множество всех профилей смешанных стратегий.*

17 *Пусть* $\sigma_i(s_i)$ *вероятность, которую смешанная стратегия* σ_i *приписывает чистой стратегии* s_i.

18 $u_i(\sigma_1, ..., \sigma_n) = \sum_{(s'_1, ..., s'_n) \in S} u_i(s'_1, ...s'_n) \cdot \sigma_1(s'_1) \cdot ... \cdot \sigma_n(s'_n)$.

19 *Профиль стратегий* $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ *является* ***равновесием Нэша (в смешанных стартегиях)*** *е.т.е.* $\forall i \in N \ \forall \sigma'_i \in \Sigma_i : u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$.

20 *Будем называть* ***игрой с совершенной информацией*** *(в развернутой форме) набор* $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N})$, *где*
– N – *множество игроков*
– A – *множество действий*
– H – *множество нетерминальных вершин*
– Z – *множество терминальных вершин*
– $\chi : H \mapsto \mathcal{P}(A)$ – *функция сопоставляющая нетерминальной вершине множество действий*
– $\rho : H \mapsto N$ – *функция, определяющая, кто из игроков совершает действие в этой вершине*

[3] $\Delta(X) = \{f : X \mapsto [0, 1] \mid \sum_{x' \in X} f(x') = 1\}$

– $\sigma : H \times A \mapsto H \cup Z$, – *функция, сопоставляющая каждой вершине и действию другую вершину, такая, что*
$\forall h' \forall h'' \forall a' \forall a'' [\sigma(h', a') = \sigma(h', a') \to (h' = h'' \wedge a' = a'')]$
– $u_i : Z \mapsto \mathbb{R}$ – *платежная функция.*

21 *Пусть множество чистых стратегий i-го игрока* $S_i = \bigtimes_{h' \in H,\ \rho(h') = i} \chi(h')$, *т.е. все варианты сочетания действий этого игрока.*

22 *Будем называть* ***игрой с несовершенной информацией*** *(в развернутой форме) набор* $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N}, I)$, *где* $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \{u_i\}_{i \in N})$ *– игра с совершенной информацией,* $I = (I_1, ..., I_n)$, *где* $I_i = (I_{i,1}, ..., I_{i,k_i})$ *– разбиение множества* $\{h \in H \mid \rho(h) = i\}$ *такое, что* $\forall h \forall h' \forall i \forall j ((h \in I_{i,j} \wedge h' \in I_{i,j}) \to (\chi(h) = \chi(h') \wedge \rho(h) = \rho(h')))$, *т.е., в вершинах информационного множества должен быть один и тот же игрок и одни и те же возможные действия.*

23 *Пусть* $\chi(I_{i,j})$ *обозначает множество действий, доступных в информационном множестве* $I_{i,j}$. *Тогда множество* ***чистых статегий*** *i-го игрока определяется как* $S_i = \bigtimes_{I_{i,j} \in I_i} \chi(I_{i,j})$.

24 *Будем называть* $b_i \in \bigtimes_{I_{i,j} \in I_i} \Delta(\chi(I_{i,j}))$ ***поведенческой стратегией*** *i-го игрока.*

25 *Пусть* $\mathcal{B}_i = \bigtimes_{I_{i,j} \in I_i} \Delta(\chi(I_{i,j}))$ *обозначает множество всех поведенческих стратегий i-го игрока,* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times ... \times \mathcal{B}_n$ *– множество всех профилей поведенческих стратегий.*

Примеры игр в стратегической форме

Пример 1 ***"Камень, Ножницы, Бумага"***

	Камень	***Ножницы***	***Бумага***
Камень	$0, 0$	$1, -1$	$-1, 1$
Ножницы	$-1, 1$	$0, 0$	$1, -1$
Бумага	$1, -1$	$-1, 1$	$0, 0$

Пример 2 ***"Дилемма заключенного"("the Prisoner's Dilemma")***

	Молчать	***Сдать***
Молчать	$-2, -2$	$-10, 0$
Сдать	$0, -10$	$-5, -5$

Пример 3 ***"Орлянка" ("Matching Pennies")***

	О	***Р***
О	$1, -1$	$-1, 1$
Р	$-1, 1$	$1, -1$

Пример 4 ***"Семейный спор-1" ("the Battle of the Sexes")***

	Б	***Ф***
Б	$2, 3$	$0, 0$
Ф	$1, 1$	$3, 2$

Пример 5 ***"Семейный спор-2"***

	Б	***Ф***
Б	$1, 2$	$0, 0$
Ф	$0, 0$	$2, 1$

Пример 6 ***"Координация-1" ("Coordination Game")***

	L	***R***
T	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

Пример 7 ***"Координация-2"***

	L	***R***
T	$2, 2$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

Пример 8 ***"Охота на оленей" ("Stag Hunt")***

	О	***З***
О	$2, 2$	$0, 1$
З	$1, 0$	$1, 1$

Пример 9 ***"Цыпленок"("Chicken")***

	C	***E***
C	$0, 0$	$-1, 1$
E	$1, -1$	$-10, -10$

Пример 10 ***"Ястребы и Голуби" ("Hawk-Dove")***

	H	***D***
H	$-2, -2$	$6, 0$
D	$0, 6$	$3, 3$