Доксатическая логика: информационное обновление и вероятностные модели[1]

1 Обновление в доксатической логике

Некоторые определения

- $[\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \varphi\}$
- $[w]_i = \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$
- $[[\varphi]]_i^w = [\varphi]_{\mathcal{M}} \cap [w]_i$
- $best_i(\varphi, w) = max_{\leq_i}([[\varphi]]_i^w)$

1.1 Консервативное обновление

1.1.1 Модель

Если $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i\in\mathcal{A}}, \{\leq_i\}_{i\in\mathcal{A}}, V)$ модель доксатической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (\mathcal{A}', W', \{\sim'_i\}_{i\in\mathcal{A}'}, \{\leq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i\in\mathcal{A}'}, V')$ модель консервативного информационого обновления, где $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$, $\leq_i^{\uparrow\varphi}$ - наибольшее отношение, которое удовлетворяет условиям:

- $\forall x \forall y((x \in best_i(\varphi, w) \wedge y \in [w]_i) \to y \leq_i^{\uparrow\varphi} x)$
- $\forall x \forall y((x, y \in [w]_i - best_i(\varphi, w) \wedge x \leq_i y) \to x \leq_i^{\uparrow\varphi} y)$

1.1.2 Оператор $\uparrow\varphi$

$\mathcal{M}, w \vDash [\uparrow\varphi]\psi$ е.т.е. $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi}, w \vDash \psi$

1.1.3 Пример

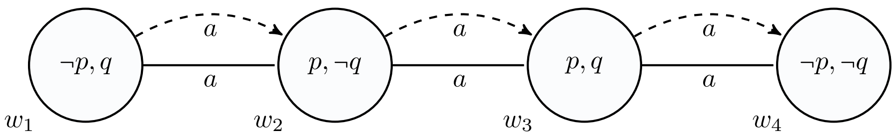

Рис. 1: $\mathcal{M}$

[1] НУГ «Формальная философия», проект «Динамический поворот в логической семантике» (2015–2016, 15-05-0005)

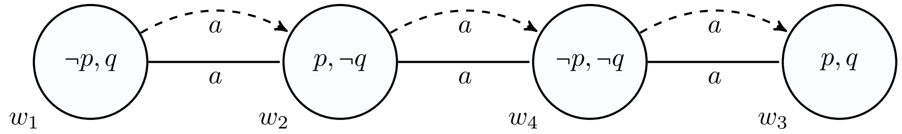

Рис. 2: $\mathcal{M}^{\uparrow p}$

1.2 Радикальное обновление

1.2.1 Модель

Если $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i\in\mathcal{A}}, \{\leq_i\}_{i\in\mathcal{A}}, V)$ модель доксатической логики, то $\mathcal{M}^{\Uparrow\varphi} = (\mathcal{A}', W', \{\sim'_i\}_{i\in\mathcal{A}'}, \{\leq_i^{\Uparrow\varphi}\}_{i\in\mathcal{A}'}, V')$ – модель радикального обновления, где $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$, $\leq_i^{\Uparrow\varphi}$ – максимальное отношение, которое удовлетворяет следующим условиям:

- $\forall x \forall y((x \in [[\varphi]]_i^w \wedge y \in [[\neg\varphi]]_i^w) \to y <_i^{\Uparrow\varphi} x)$
- $\forall x \forall y((x, y \in [[\varphi]]_i^w \wedge x \leq_i y) \to x \leq_i^{\Uparrow\varphi} y)$
- $\forall x \forall y((x, y \in [[\neg\varphi]]_i^w \wedge x \leq_i y) \to x \leq_i^{\Uparrow\varphi} y)$

1.2.2 Оператор $\Uparrow\varphi$

$\mathcal{M}, w \vDash [\Uparrow\varphi]\psi$ е.т.е. $\mathcal{M}^{\Uparrow\varphi}, w \vDash \psi$

1.2.3 Пример

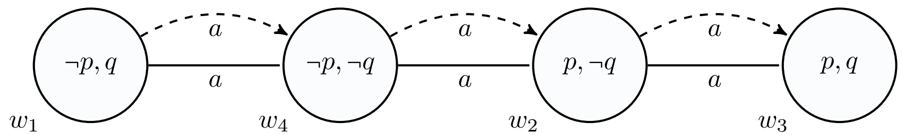

Рис. 3: $\mathcal{M}^{\Uparrow p}$

Задача Построить модели

- $\mathcal{M}^{!p}$
- $\mathcal{M}^{!q}$
- $\mathcal{M}^{\uparrow q}$
- $\mathcal{M}^{\Uparrow q}$

2 Вероятностные модели

2.1 Модель

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i\in\mathcal{A}}, \{\pi_i\}_{i\in\mathcal{A}}, V)$, где

- $\mathcal{A}$ – множество агентов
- W – множество возможных миров
- $\sim_i$ – отношение достижимости для i
- $\pi_i : W \mapsto [0,1]$ – функция такая, что
  - $\forall X \subseteq W : \pi_i(X) = \sum\limits_{w\in X} \pi_i(w)$
  - $\pi_i(W) = 1$
  - $\forall w \in W : \pi_i([w]_i) > 0$
- $V : Var \mapsto \mathcal{P}(W)$

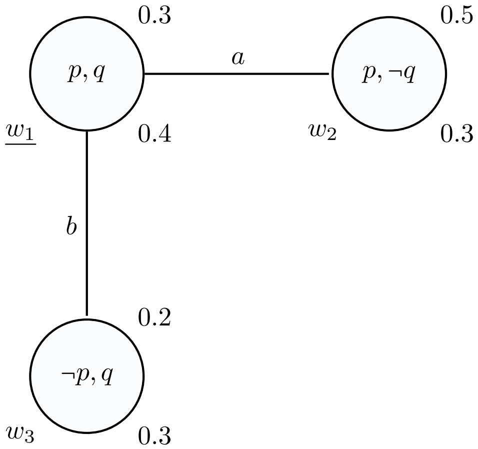

Рис. 4: $\mathcal{M}_1$, сверху значения π_a, снизу – π_b

2.2 Оператор B_i^d

$\mathcal{M}, w \models B_i^d\varphi$ е.т.е. $d \leq \pi_i([\varphi]_\mathcal{M} \mid [w]_i) = \frac{\pi_i([\varphi]_\mathcal{M} \cap [w]_i)}{\pi_i([w]_i)}$

Задачи Чему равно d?

- $\mathcal{M}, w_1 \models B_a^d p$
- $\mathcal{M}, w_3 \models B_a^d p$
- $\mathcal{M}, w_1 \models B_b^d q$
- $\mathcal{M}, w_3 \models B_b^d \neg q$

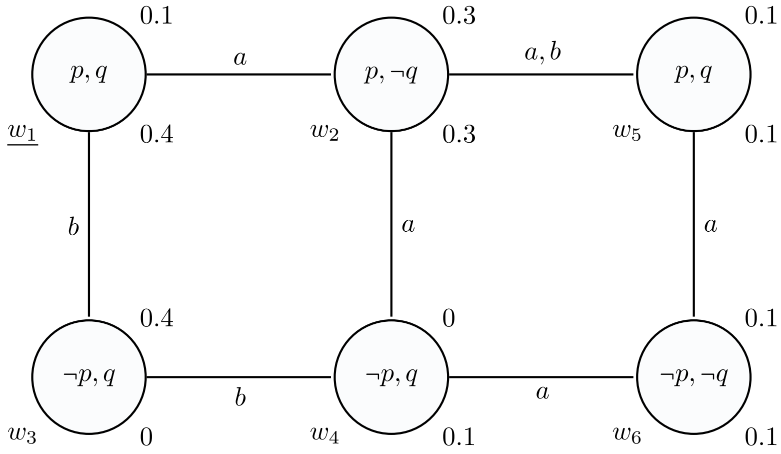

Рис. 5: $\mathcal{M}_2$, сверху значения π_a, снизу – π_b

Некоторые свойства

- $K_i\varphi \to B_i^d\varphi$
- $B_i^d\varphi \to K_i B_i^d\varphi$
- $\neg B_i^d\varphi \to K_i \neg B_i^d\varphi$
- $\not\models B_i^1\varphi \to K_i\varphi$

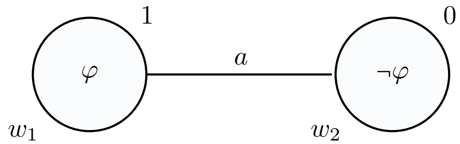

Рис. 6: $\mathcal{M}_3, w_1 \models B_a^1\varphi \wedge \neg K_a\varphi$

2.3 Некоторые свойства

- $(B_i^p(\varphi \wedge \psi) \wedge B_i^q(\varphi \wedge \neg\psi)) \to B_i^{p+q}\varphi, \;\; p + q \leq 1$
- $(\neg B_i^p(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg B_i^q(\varphi \wedge \neg\psi)) \to \neg B_i^{p+q}\varphi, \;\; p + q \leq 1$
- $B_i^p\varphi \to \neg B_i^q\neg\varphi, \;\; p + q > 1$