Формы группового знания, доксатическая логика[1]

1 Формы группового знания

1. *"Все знают"*
$E_G\varphi = \bigwedge\limits_{i\in G} K_i\varphi$

Пример 1. $E_{\{a,b\}}\varphi = K_a\varphi \wedge K_b\varphi$

2. $E^n_G := \underbrace{E_G ... E_G}_{n}$

Пример 2. $E^2_{\{a,b\}}\varphi = E_{\{a,b\}}E_{\{a,b\}}\varphi$
$= E_{\{a,b\}}(K_a\varphi \wedge K_b\varphi)$
$= K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi \wedge K_aK_a\varphi \wedge K_bK_b\varphi$
$= K_a\varphi \wedge K_b\varphi \wedge K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi$

3. *"Общее знание"*
$C_G\varphi := \bigwedge\limits_{i=0}^{\infty} E^n_G\varphi = \varphi \wedge E_G\varphi \wedge E^2_G\varphi \wedge E^3_G\varphi ...$

4. *Дистрибутивное знание*
$\sim_{D_G} = \bigcap\limits_{i\in G} \sim_i$
$M, w_i \vDash D_G\varphi$ *е.т.е.* $\forall w'(w_i \sim_{D_G} w' \to M, w' \vDash \varphi)$

Пример 3. $K_a\varphi \wedge K_b(\varphi \to \psi)$
$D_{\{a,b\}}\psi$

5. *Некоторые свойства*

- $C_G(\varphi \to \psi) \to (C_G\varphi \to C_G\psi)$
- $C_G\varphi \to (\varphi \wedge E_GC_G\varphi)$
- $C_G(\varphi \to E_G\varphi) \to (\varphi \to C_G\varphi)$

Пример 4. *Формулы и модели*

1. $E_{\{a,b,c\}}\varphi \wedge \neg K_aK_b\varphi$
2. $E_{\{a,b\}}\varphi \wedge \neg E_{\{a,b\}}E_{\{a,b\}}\varphi$
3. $D_{\{a,b\}}\varphi \wedge \neg K_a\varphi \wedge \neg K_b\varphi$
4. $C_{\{a,b\}}\varphi \wedge \neg K_c\varphi$
5. $E^2_{\{a,b\}}\varphi \wedge \neg C_{\{a,b\}}\varphi$

[1] НУГ «Формальная философия», проект «Динамический поворот в логической семантике» (2015–2016, 15-05-0005)

2 Основные идеи доксатической логики

6. $B_i\varphi$ – *агент i полагает (считает/верит/думает), что* φ

7. *Некоторые свойства*

- $K_i\varphi \to B_i\varphi$
- $K_i\varphi \to \varphi$
- $B_i\varphi \to B_iB_i\varphi$
- $\neg B_i\varphi \to B_i\neg B_i\varphi$

8. *Модель доксатической логики*
$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i\in A}, \{\leq_i\}_{i\in A}, V)$

- $\forall w'(w' \leq_i w')$
- $\forall w'\forall w''\forall w'''((w' \leq_i w'' \wedge w'' \leq_i w''') \to w' \leq_i w''')$
- $\forall w'\forall w''((w' \leq_i w'' \vee w'' \leq_i w') \to w' \sim_i w'')$
- $\forall w'\forall w''(w' \sim_i w'' \to (w' \leq_i w'' \vee w'' \leq_i w'))$

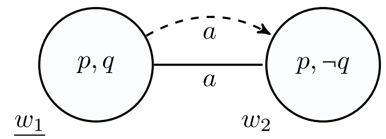

Рис. 1: Модель доксатической логики

9. *Некоторые определения*

- $[\varphi]_{\mathcal{M}} := \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \varphi\}$
- $[w]_i := \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$
- $max_{\leq_i}(X) := \{w \in X \mid \forall w' \in X : w' \leq_i w\}$, *где* $X \subseteq W$

10. B_i
$\mathcal{M}, w \vDash B_i\varphi$ *е.т.е.* $\forall w' \in max_{\leq_i}([w]_i) : \mathcal{M}, w' \vDash \varphi$

11. *Условное убеждение* $\mathcal{M}, w \vDash B^{\psi}_i\varphi$ *е.т.е.* $\forall w' \in max_{\leq_i}([w]_i \cap [\psi]_{\mathcal{M}}) : \mathcal{M}, w' \vDash \varphi$

Пример 5. *Формулы и модели*

1. $B_a\varphi \wedge \neg\varphi$
2. $B_a\varphi \wedge \neg K_a\varphi$
3. $B_a\varphi \wedge \neg K_bB_a\varphi$
4. $B_a\varphi \wedge B_bB_a\neg\varphi$

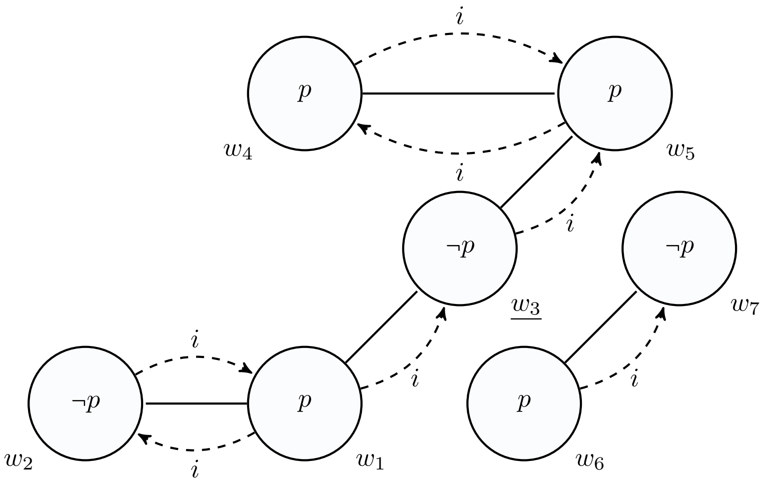

Рис. 2: Модель доксатической логики-2

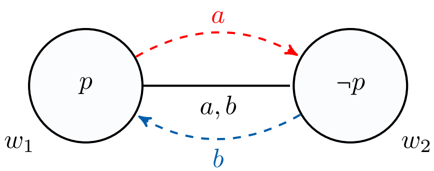

Рис. 3: "Конфликт мнений"

5. $\neg B_a^{\psi}\varphi \wedge B_a(\psi \to \varphi)$

12. *Связь условного убеждения с другими операторами*

- $B_i\varphi = B_i^T\varphi$, *где* T *- любая тавтология*
- $K_i\varphi = B_i^{\psi}\varphi$ *для любого* ψ

13. ***"robust belief"***
$\mathcal{M}, w \vDash B_i^+\varphi$ *т.т.е.* $\forall w'(w \preceq_i w' \to \mathcal{M}, w' \vDash \varphi)$

14. ***"strong belief"***
$\mathcal{M}, w \vDash B_i^s\varphi$ *т.т.е.*
1) $\hat{K}_i\varphi$
2) $([w]_i \cap [\neg\varphi]_{\mathcal{M}}) \preceq_i ([w]_i \cap [\varphi]_{\mathcal{M}})$, *где* $X \preceq_i Y := \forall x \in X \ \forall y \in Y : x \preceq_i y$

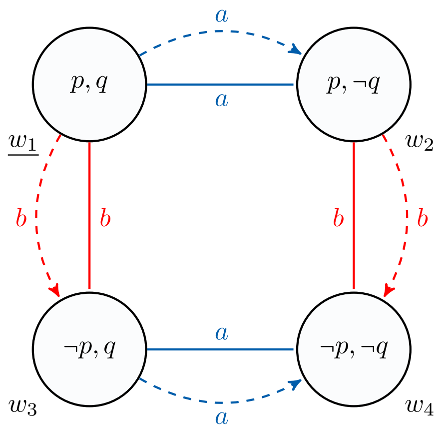

Рис. 4: "Знания/мнения a и b "

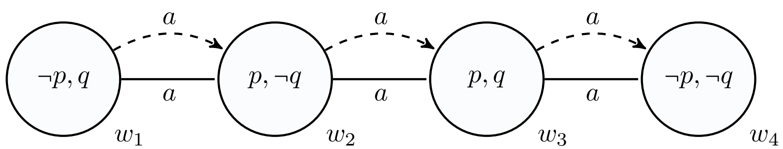

Рис. 5: $B_a\neg p \wedge B_a^q p$

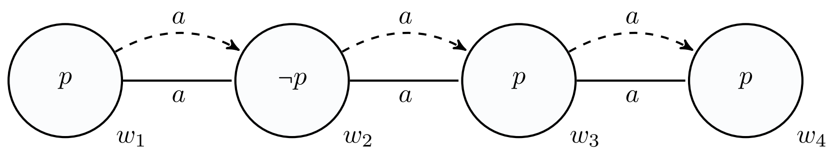

Рис. 6: $\mathcal{M}, w_3 \vDash B_a^+ p \wedge \neg B_a^s p$

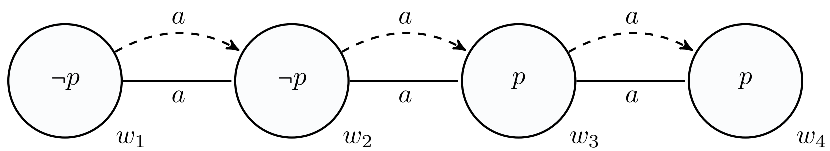

Рис. 7: $\mathcal{M}, w_1 \vDash \neg B_a^+ p \wedge B_a^s p$