КВАНТОРЫ И ПУЧКИ

БИЛЛ ЛОВЕР

Единство противоположностей в заглавии этой статьи это по существу диалектическое единство логики и геометрии; при этом есть достаточные основания чтобы считать, что геометрический аспект является ведущим. В то же время для нашей совместной работы с Майлом Тьерни существенно также влияние в противоположном направлении: "топология" Гротендика естественным образом может быть представлена в виде модального оператора "локально верно то, что", обычные логические операторы такие как $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ имеют естественные аналоги, которые применяются не к пропозициональным функциям, а к семействам геометрических объектов, а важный прием состоит в том, что конструкции первоначально изученные в категории $\underline{S}$ абстрактных множеств переносятся на произвольный топос. Мы начнем с того, что представим основные противоречия теории топосов Гротендика-Жиро-Вердье с помощью четырех или пяти сопряженных функторов, что позволит нам существенным образом обобщить эту теорию избавив ее от всякой зависимости от *внешнего* понятия бесконечного предела (что, в частности, позволяет утверждать, что логика это частный случай геометрии). Этот метод также позволяет внутренним образом определить понятие булевозначной модели категории $\underline{S}$ ($\underline{\underline{BVM}}/\underline{S}$) и доказать независимость континуум-гипотезы без использования трансфинитной индукции. Второе применение описанного здесь метода состоит во внутреннем геометрическом построении глобального спектра Шевалье-Хаким для данного кольцевого топоса без всякого выбора "сайта определения".

Когда главные противоречия предмета исследования уже найдены, научная процедура состоит в том, что эти противоречия формулируются в виде лозунгов, которые затем используются в качестве идеологического оружия для дальнейшего развития и преобразования данного предмета. В случае "теории множеств" это требует учета того известного из опыта обстоятельства, что основные пары противоположных тенденций в математике имеют вид сопряженных функторов. Это позволяет нам избавиться от не имеющих математического смысла следов ($\in$) процесса накопления ($\cup$) множества подмножеств (P) на каждом шаге метафизической "конструкции". Далее, опыт работы с пучками, перестановочными представлениями, алгебраическими пространствами и т.д. показывает, что в геометрии "теория множеств" должна иметь в виду не только *абстрактные* множества существующие вне времени, пространства, кольца определений и т.д., но и более общие множества, которые развиваются в соответствии с этими параметрами. Для таких множеств логика обычно является "интуиционистской" (по своим формальным свойствам), аксиома выбора обычно ложна, и данное множество обычно не задается только своими точками определенными на 1.

1. Под топосом мы будем понимать категорию $\underline{E}$ с конечными пределами и конечными ко-пределами, которая (а) является декартово замкнутой и (б) имеет классификатор подобъектов T. Другими словами, (а) для каждого объекта A существует внутренний гом-функтор $(\,)^A$, который является правым сопряженным к декартову произведению $(\,) \times A$ и (б) существует единственное отображение "истина" $1 \to T$, такое что любой мономорфизм $X' \hookrightarrow X$ в $\underline{E}$ является пулбэком истины по единственному характеристическому отображению $X \to T$. В этом состоит основная борьба внутренней теории произвольного топоса, которая ведет к очень быстрому развитию. "Множество" T "истинностных значений" для $\underline{E}$ это объект, обладающий структурой алгебры Гейтинга, которая является полной в том смысле, что для любого отображения $f : X \to Y$ is $\underline{E}$ существует левый сопряженный функтор $\exists_f$ и правый сопряженный функтор

$$\forall_f : T^X \to T^Y$$

к отображению T^f. Обычно T не является булевой алгеброй; например, если $\underline{E}$ это все пучки на некотором топологическом пространстве со значениями в $\underline{S}$, то T это пучок, для которого все сечения по любому U составляют множество открытых подможеств U; если $\underline{E} = \hat{\underline{C}} = \underline{C}^{op}\underline{S}$ это функторы на малой категории $\underline{S}$ со значениями в множествах, то $T(C)$ это все сита (cribbles) объекта C. Для любого $\phi : X \to T$ соответствующий подобъект мы обозначаем как $\{X/\phi\}$, имея при этом в виду, что для подходящих формул логики высшего порядка соответствующие подобъекты действительно существуют.

Все обычные точностные свойства (exactness properties) топоса являются простыми следствиями [предложенного выше определения топоса]; большинство этих свойств следует из того факта, что для любого $f : X \to Y$ существует функтор

$$\Pi_f : \underline{E}/X \;\to\; \underline{E}/Y$$

который является правым сопряженным по отношению к пулбэку семейств $E \to Y$ по f в семейства $E \times_Y X$ индексированные по X. Это утверждение обобщается на случай, когда на слои оказывается действие. Если $\underline{C}$ из $Cat(\underline{E})$ это внутренняя категория категории $\underline{E}$ с объектом-объектов X, то все действия $\underline{C}$ на произвольные семейства $E \to X$ объектов внутренне параметризованных по X дают новый *топос* $\hat{\underline{C}} = \underline{C}^{op}\underline{E}$ внутренних пучков на $\underline{C}$ со значениями в $\underline{E}$. Если $f : \underline{C} \to \underline{C'}$ это любой внутренний функтор, то индуцированный функтор имеет правый сопряженный функтор $f_* : \hat{\underline{C}} \to \hat{\underline{C'}}$ (а также левый сопряженный фуктор f_0). Это означает, что в очень полезном смысле любой топос (даже счетный) является внутренне полным.

Обозначим σ_X функтор "поддержки", который каждому семейству $E \to X$ сопоставляет характеристическое отображение образа структурного отображения. Это позволяет рассмотреть прямые противоречия (особого рода) между логикой и геометрией, которые возникают в теории доказательств и напоминают о виртуальных векторных расслоениях:
(П) Для любого отображения $f : X \to Y$

$$\begin{tikzcd}
\underline{E}/X \arrow[r, "\Pi_f"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & \underline{E}/Y \arrow[d, "\sigma_Y"] \\
\underline{E}(X,T) \arrow[r, "\forall_f"] & \underline{E}(Y,T)
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма является коммутативной для перестановочных представлений всякой группы, но не для категории $\underline{2}\,\underline{S}$ отображений множеств. С другой стороны, и в интуиционистской логике, и в алгебраической геометрии нужно определить, в какой степени алгебраический оператор действительно означает существование, то есть имеет ли место

($\forall$) Для любого объекта E эпи-компонент *расщепляется* в следующей диаграмме

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, shift left] & \{1|\sigma_1(E)\} \arrow[l, dotted, shift left] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Это последнее условие *не* выполняется для $\underline{G}\ \underline{S}$, где $\underline{G}$ это нетривиальная группа, но *выполняется* для $\underline{P}\ \underline{S}$, где $\underline{P}$ это любое полностью упорядоченное множество (вроде $\underline{2}$). На самом деле коньюнкция условий Π и $\exists$ эквивалентна тому условию, что всякий эпиморфизм расщепляется. На геометрическом языке это называется нулевой размерностью, а на логическом языке называется аксиомой выбора. Если $\underline{E}$ это категория классов эквивалентных формул какой-нибудь теории высшего порядка, то $\exists$ это условие Сколема. Однако та же проблема возникает и в том случае, когда $\underline{E}$ имеет геометрическую природу, поскольку тогда $\exists\phi =$ истине означает действительное существование только локально.

Часто в топосе приходится использовать еще один сопряженный функтор, который отражает противоречие между данными примитивной рекурсии и семейством последовательностей определяемым с помощью этой рекурсии (когда такие последовательности имеют значения в T это называется математической индукцией). В частности, это нужно для того, чтобы исследовать ко-уравнитель или построить свободную группу (или свободное кольцо) порожденную данным объектом:

$(\omega)\underline{E}^{\circlearrowright} \to E$ не является эквивалентностью и имеет левый сопряженный функтор $(\ ) \times \omega$. Здесь $\underline{E}^{\circlearrowright}$ обозначает обычную категорию объектов с отображениями в себя (эндоморфизмами). Тем не менее мы не стали включать эту аксиому в определение топоса, во-первых, поскольку более общий подход оказывается полезным, и во-вторых, поскольку она автоматически переносится на любой топос $\underline{E}$ “определенный над” другим топосом $\underline{E}_0$, в котором эта аксиома истинна.

[Выражение] “[о]пределенный над” указывает на *геометрический морфизм* топосов, то есть на функтор имеющий точный левый сопряженный. Есть еще *логические морфизмы* топосов, то есть функторы, сохраняющие с точностью до изоморфизма все структуры входящие в определение топоса. Эти два типа морфизмов объединяются в понятии *локального гомеоморфизма*, то есть такого геометрического морфизма u для которого левый сопряженный u^* является логическим морфизмом.

ТЕОРЕМА. Всякий геометрический морфизм топосов $u : \underline{E}' \to \underline{E}''$ может быть факторизован в виде

$$\begin{tikzcd}
\underline{E}' \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & \underline{E}'' \\
& \underline{E} \arrow[ur, "u''"'] &
\end{tikzcd}$$

где $\underline{E}$ это тоже топос, а u', u'' это геометрические морфизмы такие что $(u'')_*$ является полным и строгим функтором вида $\underline{E} \to \underline{E}''$, тогда как левый сопряженный $(u')^* : \underline{E} \to \underline{E}'$ отражает изоморфизмы. Далее, u'' (и, следовательно, любой полный и строгий геометрический морфизм) полностью определяется единственным отображением $j_u : T'' \to T''$ в $\underline{E}''$ которое мы называем “топологией” Гротендика; конкретно, u'' определяется как j_u-пучок.

В случае топоса $\underline{E}$ (а не $\underline{E}''$) соответствующее условие, которому должен удовлетворять модальный оператор $j : T \to T$ состоит в том, что (а) он должен быть идемпотентным и (б) он должен коммутировать с истиной и с отображением-коньюнкцией $\Lambda : T \times T \to T$. Такой оператор функториально индуцирует оператор замыкания на множестве подобъектов любого объекта. (Такое замыкание не совпадает с замыканием Куратовского; например, в случае предпучков на топологическом пространстве соответствующий оператор j приписывает любому порядковому идеалу открытых подмножеств главный идеал заданный его объединением). Чтобы показать, что j дает полный и строгий геометрический морфизм $\underline{E}_j \to \underline{E}$ топосов, мы показывем что обычное определение j-пучка эквивалентно тому условию, что данный функтор имеет диагональ, которая j-замкнута в [соответствующем] квадрате (“отделимость”), и что этот функтор j-замкнут в любом отделимом объекте, в который он вкладывается. Далее ассоциированный пучковый функтор строится без всякого использования бесконечных прямых пределов с помощью следующих четырех наблюдений по поводу “топологии” Гротендика (т.е. модального оператора j удовлетворяющего условиям (а) и (б)): 1) Образ T_j оператора j является j-пучком. 2) Если Y это j-пучок, то Y^X тоже j-пучок. 3) Для любого X j-замыкание диагонали в $X \times X$ является отношением эквивалентности. 4) Для любого мономорфизма $X \to Y$ в любой пучок Y j-замыкание X в Y является пучком ассоциированным с X. (Прежде чем использовать эти четыре наблюдения необходимо рассмотреть синглетонное отображение $\{\ \} : X \to T^X$.) Чтобы доказать, что ассоциированный пучковый функтор является точным, достаточно исследовать морфизмы, которые он обращает.

Важный пример, в котором мы используем приведенную выше теорему о факторизации это (обобщенная на произвольный базовый топос $\underline{E}$ вместо $\underline{S}$) конструкция Годмена, то есть построение пучков по базе топологии путем разрешения противоречия между предпучками и ("дискретным") этальным пространством. Под базой топологии мы понимаем тройку, состоящую из объекта ("точек") X, объекта ("индексов элементов базы") A и спаривания $X \times A \to T$, удовлетворяющего условию прямизны, согласно которому индуцированная пара сопряженных функторов

$$\underline{E}/X \underset{\Gamma}{\overset{lim_{\rightarrow}}{\leftrightarrows}} \underline{A}^{op}\underline{E}$$

является геометрическим морфизмом топосов. (Здесь $\underline{A}$ это частично упорядоченное множество, где "гом"-отношение порядка $F \rightrightarrows A$ "объектов" из A это просто пулбэк по $A \to T^X$ обычного отношения порядка подобъектов X.) Тогда топос-"образ" это обычная категория пучков, которую можно описать либо с помощью "топологии" Гротендика в $\underline{A}^{op}\,\underline{E}$, либо с помощью точной левой ко-тройки (стандартной конструкции) в $\underline{E}/X$.

Топология Гротендика есть в любом топосе. Речь идет о двойном отрицании, которое можно иначе выразить словами с помощью выражения "ко-финально верно то, что". Категория $\underline{E}_{\neg\neg}$ пучков двойного отрицания всегда удовлетворяет тому условию, что логика является классической:

$(\neg)\ 1\ +\ 1 \xrightarrow{\sim} T$

Это эквивалентно тому, что T (то есть $T_{\neg\neg}$ в $\underline{E}_{\neg\neg}$) является булевой алгеброй, что геометрически означает, что каждый мономорфизм $X' \hookrightarrow X$ входит в (единственную) диаграмму прямой суммы $X'\ +\ (\neg X') \xrightarrow{\sim} X$.

Чтобы построить логические морфизмы топосов нам нужно воспользоваться геометрическими морфизмами, а также конструкцией обобщенного ультрапроизведения, которая в общем случае *не* дает геометрический морфизм и таким образом выводит нас за пределы области внешне полных (то есть определенных на данном $\underline{E}_0$) топосов, которые до сих пор рассматривались в геометрии. Данные нужные для определения обобщенного ультрапроизведения это пара, состоящая [(1)] из функтора $u_* : \underline{E} \to \underline{E}_0$ между двумя топосами, который может быть геометрическим морфизмом, но в общем случае только сохраняет конечные обратные пределы, и [(2)] гомоморфизма $h : u_*(T) \to T_0$ алгебр Гейтинга в $\underline{E}_0$. Новая категория $\underline{E}_h$ получается из $\underline{E}$ с помощью формального обращения всех тех мономорфизмов $X' \hookrightarrow X$ в $\underline{E}$, для которых "универсальная квантификация принадлежит ультрафильтру" в том смысле, что $h(u_*(\sigma_1(\Pi_{X\to 1}X'))) =$ истина $_0$.

ТЕОРЕМА

Пусть $\underline{E}_h$ топос и $\underline{E}_0 \to \underline{E}_h$ логический морфизм. Тогда $\underline{E}_h$ определен на $\underline{E}_0$ *в смысле замкнутых категорий*, но как правило не в геометрическом смысле топоса.

Эта теорема нужна, например, чтобы показать, что $\underline{\underline{BVM}}/\underline{S}$ можно всегда свести к двузначной модели; это позволяет доказывать основные теоремы о независимости в топосе высшего порядка не выбирая h и не производя такую редукцию в явном виде.

2. Теперь мы можем уточнить предположения, которые обычно необходимо делать о категории $\underline{S}$ абстрактных множеств: это может быть любой топос, удовлетворяющий условиям $(\Pi), (\exists), (\omega), (\neg)$, а также условию "несводимости единицы":

$(\bigvee)$ Если $\phi_i : 1 \to T$ и $\phi_1 \bigvee \phi_2 =$ истине,

то $\phi_1 =$ истине или $\phi_1 =$ истине.

Из условий $(\neg)$ и $(\bigvee)$ следует, что существует только два подобъекта единицы. Однако как показывает пример $\underline{M}^{op}\underline{S}$, где $\underline{M}$ это моноид, но не группа, обратное утверждение неверно. С другой стороны, из $(\exists)$ и $(\exists)$ следует, что подобъекты единицы (которые формируют "полную" булеву алгебру) также формируют *порождающее* семейство для своей категории; топос удовлетворяющий $(\exists)$ и $(\neg)$ мы будем называть "булевым" и пользоваться обозначением $2 = T$. Булевозначной моделью $\underline{E}$ категории $\underline{S}$ (в символах: $\underline{E} \in \underline{\underline{BVM}}/\underline{S}$) мы называем булев топос $\underline{E}$ определенный на $\underline{S}$. Можно показать, что любая BVM на $\underline{S}$ также удовлетворяет (Π), то есть аксиоме выбора, и что би-категория $\underline{\underline{BVM}}/\underline{S}$эквивалентна категории $\underline{CBA}(\underline{S})$ $\underline{S}$-полных булев алгебр в $\underline{S}$.

Категории BVM можно также построить как пучки двойного отрицания $\tilde{\underline{P}}$ в категории функторов из некоторого частично упорядоченного множества $\underline{P}$ из $\underline{S}$ со значениями в $\underline{S}$. В этом случае (как и в других случаях) полезно использовать терминологию Когена: если $X \in \tilde{\underline{P}}$, $q \geq p$ в $\underline{P}$, $\phi : X \to 2$ и x это элемент X определенный на p, мы будем говорить, что "q вынуждает $\phi(x)$" тогда и только тогда, когда $\phi(x/q) =$ истине. В $\tilde{\underline{P}}$ q вынуждает $\phi(x)$ тогда и только тогда, когда r вынуждает $\phi(x)$ для r из множества, которое при $r \geq q$ является кофинальным.

Чтобы опровергнуть континуум-гипотезу в некоторой [модели] BVM $\tilde{P}$ мы вслед за Когеном выбираем в $\underline{S}$ множество I такое что $2^\omega < I$ в том смысле, что мономорфизм существует, а эпиморфизм нет. Тогда $\underline{P}$ это частично упорядоченное (по объему)множество всех частичных отображений $\omega \times I \to 2$ с конечным доменом, которые можно определить в любом топосе. Тогда в $\tilde{\underline{P}}$ мы имеем

$$\omega < u^*(2^\omega) < 2^\omega$$

где u^* это "постоянный пучковый функтор", который является левым сопряженным к функтору "глобальных сечений" $u_* : \underline{\tilde{P}} \to \underline{S}$. Чтобы доказать это утверждение заметим, что $\underline{P}$ это по существу определение отображения $u^*(I) \hookrightarrow 2^\omega$ *на покрытии*, и что для пучков такое отображение существует. Далее, принципиальной является следующая

ЛЕММА

Пусть $\underline{P}$ это любое частично упорядоченное множество в $\underline{S}$ удовлетворяющее подходящему "условию счетных цепей" и пусть X в $\underline{S}$ и Y в $\underline{S}$ при том, что $Y \times \omega \cong Y$. Тогда из того, что

$Epi(X, Y)$ в $underlineS$ следует, что $Epi(u^*(X), u^*(Y)) = 0$ в $\underline{\tilde{P}}$, где $Epi(X, Y)$ это объект, который может быть определен в любом топосе как пулбэк "образа" по "истине".

3. База топологии особого рода возникает, когда данный объект A имеет структуру (мультипликативного) коммутативного моноида и когда дан *гомоморфизм* $u : A \to T^X$ в моноид подобъектов объекта X, а умножение определяется как коньюнкция (пересечение). В этом случае объект отношения порядка $F \rightrightarrows A$ задает подмоноид постоянного фуктора $\bar{A}$ в $\underline{A}^{op}\underline{E}$ и отношение "принадлежности" $P \hookrightarrow X \times A$ индуцированное спариванием задает подмоноид постоянного семейства $\dot{A}$ в $\underline{E}/X$. Далее с помощью частных мы можем получить новые коммутативные моноиды $(\dot{A})_P$ в $\underline{E}/X$ и $(\bar{A})_F$ в $\underline{A}^{op}\underline{E}$; в частности, в категории промежуточных пучков мы можно получить моноид $\tilde{A}$, который является отражением $(\bar{A})_F$, и который отражается в $(\dot{A})_P$.

Предположим теперь, что A это коммутативное *кольцо* в $\underline{E}$. Из-за интуиционистской природы логики ([которая проявляет себя] уже в $\underline{E} = \underline{2}\,\underline{S}$) мы вынуждены определять *простой* элемент x в A не как идеал, а как подобъект A удовлетворяющий условиям следующего вида:

1) $[1 \in x] =$ истина
2) $[f.g \in x] = [f \in x] \bigwedge [g \in x]$
3) $[0 \in x] =$ ложь
4) $[f + g \in x] \leq [f \in x] \bigvee [g \in x]$

Земетим, что условие 2) имеет вид "тогда и только тогда", и что дизъюнкция в 4) означает по существу наименьшую верхнюю грань двух подобъектов, которая в случае общего топоса означает действительную дизъюнкцию только локально. Мы будем называть кольцо *локальным* когда подобъект единиц является простым. С помощью взятия конечного обратного предела мы получаем $X \hookrightarrow T^A$, то есть "подобъект объекта T^A состоящий из всех простых подобъектов объекта A". Это дает в $\underline{E}$ базу топологии, для которой пучки образуют топос $Spec(A)$ известный как глобальный спектр категории $\underline{E}, A$; в $Spec(A)$ объект $\tilde{A}$ является локальным кольцом и локальной универсальной A-алгеброй в топосе определенном на $\underline{E}$. Заметим, что в этом процессе отношение принадлежности полностью превращается в свою противоположность.

4. Как только мы начали применять наш метод к алгебраической геометрии, немедленно возникли другие вопросы. В неопубликованной работе Жоржа Руссо показано, что семантика, которую обычно строят для интуиционистской логики это обычная семантика абстрактных множеств построенная в подходящем топосе $\underline{\Lambda}\ \underline{S}$; Андреас Кок недавно показал, что аналогичное утверждение верно для теоретико-доказательной интерпретации Лойшли. Но нам кажется также возможным рассмотреть параметры приспособленные для применения к настоящему материалистическому времени, а не к этапам построения воображаемой "конструкции". В любом топосе удовлетворяющем условию (ω) каждое определение действительного числа дает определенный объект, но пока неизвестно, какие теоремы [математического] анализа можно доказать об этом объекте.

Библиография:

(1) Mao Tsedung. - *On contradiction. Where do correct ideas come from?* Peking (1966) [Русские переводы: Мао Цзедун. (а) *Относительно противоречия.* Избранные произведения, т. 2, Москва, Изд. Иностранной литературы, стр. 407-469. (б) *Откуда у человека правильные идеи?* Выступления и статьи Мао Цзе-дуна разных лет. Москва, "Прогресс" (1976), стр. 154-155]

(2) Grothendieck-Giraud-Verdier. - *Topologie et faisceaux*

(3) Mme Hakim. - *Schemas relatifs* (Thesis) Orsay (1967), S.G.A.

(4) Solovay-Scott. - *Boolean valued models of set theory* To appear.

(5) Lawvere. - (a) Adjointness in Foundations (Dialectica), vol. 23 (1969), pp. 281-296; (b) Equality in Hypodoctrines and the Comprehesion Scheme as an Adjoint Functor, *Proc. of A.M.S. Symposium on Pure Math XVII - Applications of Category Theory*, Providence (1970).